

研求之樂

丘成桐

哈佛大學與香港中文大學

3:00pm - 4:00pm

二零一一年一月十五日

加州理工學院

我年少時，並不喜歡讀書，在元朗的平原上嬉戲玩耍，也在沙田的山丘和海濱遊戲。與同伴在一起，樂也融融，甚至逃學半年之久。真可謂倘佯於山水之間，放浪形骸之外。



沙田的童年

在這期間，唯一的負擔是父親要求我讀書練字，背誦古文詩詞，讀近代的文選，也讀西方的作品。



但是當時我喜愛的不是這些書，而是武俠小說，從梁羽生到金庸的作品都看了一遍。由於這些小說過於昂貴，只能從鄰居借來，得之不易。借到手後，驚喜若狂。父親認為這些作品文字不夠雅馴，不許我看，所以我只得躲在洗手間偷偷閱讀。

除了武俠小說外，還有薛仁貴征東、征西、七俠五義，和一些禁書，都是偷偷的看，至於名著如水滸傳、三國傳義、紅樓夢等則是公開的閱讀，因為這是父親認為值得看的好書。他要求我看這些書的同時，還要將書中的詩詞記熟。這事可不容易，雖然現在還記得其中一些詩詞，例如黛玉葬花詩和諸葛亮祭周瑜的文章等，但大部份還是忘記了。

三國演義和水滸傳很快就引起我的興趣，但是讀紅樓夢時僅看完前幾回，就沒有辦法繼續看下去。一直到父親去世後，才將這本書仔細的讀過一遍，也開始背誦其中的詩詞。由於父親的早逝、家庭的衰落，與書中的情節共鳴，開始欣賞而感受到曹雪芹深入細致的文筆，絲絲入扣地將不同的人、物、情景，逐步描寫出舊社會的一個大悲劇。

四十多年來，我有空就看這部偉大的著作，想像作者的胸懷和澎湃豐富的感情，也常常想像在數學中如果能夠創作同樣的結構，是怎樣偉大的事情。



紅樓夢

我個人認為：感情的培養是做大學問最重要的一部份。

汪中在《漢上琴台之銘》中有句雲：
「撫弦動曲，乃移我情。」



《琴苑要錄》：「伯牙學琴於成連，三年而成，至於精神寂寞，情之專一，未能得也……伯牙心悲，延頸四望，但聞海水汨沒，山林穀冥，群鳥悲號，仰天長嘆曰：『先生將移我情。』」

伯牙鼓琴



這一段話，對我深有感觸。立志要做大學問，只不過是一剎那間事。往往感情澎湃，不能自己，就能夠將學者帶進新的境界。



父親去世以前，我學習了不少知識，也讀了不少好文章。但他的去世，卻深深地觸動了我的感情。我讀紅樓夢，背誦秦漢和六朝的古文，讀司馬遷的自傳、報任安書、李陵答蘇武書、陶淵明的歸去來辭等等文章，這些文章的內容都深深地印記在我的腦海中。



文天祥 (1236-1283)

文天祥說：「風簷展書讀，古道照顏色。」足可以描述我當時讀書的境況。除了中國文學外，我也讀西方的文學，例如歌德的浮士德。

這本歌劇描述博士浮士德的苦痛，與紅樓夢相比，一是天才的苦痛，一是凡人的苦痛。描寫苦痛的極至，竟可以說得上是壯美的境界，足以移動人的性情。

就這樣，由於父親的去世和閱讀文學的書籍，這大半年感情的波動，使我做學問的興趣忽然變得極為濃厚，再無反顧。

凡人都有悲哀失敗的時候，有人發憤圖強，有人則放棄理想以終其身。

黃仲則詩：「結束鉛華
歸少作，屏除絲竹入中年，
茫茫來日愁如海，寄語羲和
快著鞭。」

詩雖感人，思想畢竟頹
廢，使人覺得陰雲蔽天。難
怪黃仲則一生潦倒，終無所
獲。



黃仲則 (1749-1783)

反觀太史公司馬遷，慘受腐刑，喟然而嘆「身毀不用矣」。卻完成了傳誦千古的史記，適可藏諸名山大都。他在自傳中說：「自周公卒，五百歲而有孔子，孔子卒後，至於今五百歲，有能紹明世，正易傳，繼春秋，本詩書禮樂之後，意在斯乎，意在斯乎。小子何敢讓焉。」太史公的挫敗和鬱結，反而使他志氣更為宏大。



司马迁(前145-前87)

四十年來我研究學問，
處事為人，屢敗屢進，未曾
氣餒。這種堅持的力量，當
可追索到當日感情之突破。
我一生從未放棄追尋至真至
美的努力，可以用元稹的詩
來描述：「曾經滄海難為
水，除卻巫山不是雲。」



元稹 (779-831)

當遇到困難時，我
會想起韓愈的文章：

「苟餘行之不迷，雖顛
沛其何傷。」



韓愈 (768-824)

我也喜歡用左傳中的兩句來勉勵自己：
「左輪朱殷，豈敢言病。」此句出自左傳晉齊鞍之戰：「卻克傷於矢，流血及屨，未絕鼓音，曰：『餘病矣。』張侯曰：『自始合，而矢貫餘手及肘，左輪朱殷，豈敢言病？吾子忍之……師之耳目，在吾旗鼓，進退從之，此車一人殿之，可以集事，若之何其以敗君之大事也。』」

做研究生時，我有一個想法，微分幾何畢竟是牽涉及分析（即用微積分為工具）和幾何的一門學問，幾何學家應該從分析著手研究幾何。況且微分方程的研究已經相當成熟，這個研究方向大有可為。雖然一般幾何學家視微分方程為畏途，我決定要將這兩個重要理論結合，讓幾何和分析都表現出它們內在的美。

在柏克萊的第一年我跟隨 Morrey 教授學習偏微分方程，當時並不知道他是這個學科的創始者之一。從他那裏我掌握了橢圓形微分方程的基本技巧。在研究院的第二年我才開始跟隨導師陳省身先生學習複幾何。



柏克萊

畢業後，在我的學生和朋友 Schoen、Simon、鄭紹遠、Uhlenbeck、Hamilton、Taubes、Donaldson、Peter Li 等人的合作下，逐漸將幾何分析發展成一個重要的學科，也解決了很多重要的問題。



Schoen



鄭紹遠



Hamilton

這是一種奇妙的經驗，每一個環節都要花上很多細致的推敲，然後才能夠將整個畫面構造出來，正如曹雪芹寫作紅樓夢一樣。

曹雪芹說：「字字看來皆是血，十年辛苦非尋常。」



曹雪芹 (1713-1763)

我們眾多朋友創作的幾何分析，也差不多花了十年才成功奠基。不敢說是「以血書成」，但每一次的研究都很花費工夫，甚至廢寢忘餐，失敗再嘗試，嘗試再失敗，經過不斷的失敗，最後才見到一幅美麗的圖畫。

簡潔有力的定理使人喜悅，就如讀詩經和論語一樣，言短而意深，卻引起一連串的突破，使我們對數學有更深入的認識。每一個數學家都有自己的品味和看法，我本人則比較喜歡這一類數學。

當定理證明後，我們會覺得整個奮鬥的過程都是有意思的，正如智者垂竿，往往大魚上釣後，又將之放生，釣魚的目的就是享受與魚比試的樂趣，並不在乎收穫。



從數學的歷史看，只有有深度的理論才能夠保存下來。千百年來，定理層出不窮，但真正名留後世的結果卻是鳳毛麟角，這是因為有新意的文章實在不多，有時即使有新意，但是深度不夠，也很難傳世。

當年我看武俠小說，很是興奮，也得到一時的享受，但是畢竟與現實相差太遠，最終不能沁人心脾。在閱讀有深度的文學作品時，卻有不同的感覺。

我們幾個朋友在研究和奮鬥程過中，始終不搞太抽象的數學，總願意保留大自然的真和美。

王國維評古詩十九首

「昔為倡家女，今為蕩子婦，蕩子行不歸，空牀難獨守。」「何不策高足，先據要路津，無為久貧賤，輾軻長苦辛。」，以為其言淫鄙，但從美學的觀點，卻不失其真。



王國維 (1877-1927)

數學創作也如寫小說，總不能遠離實際。紅樓夢能夠扣人心弦，乃是因為這部悲劇描述出家族的腐敗、社會的不平、青春的無奈，是一個普羅眾生的問題。好的數學也應當能接觸到大自然中各種不同的現象，求其真知矣，才能夠深入，才能夠傳世。

今日有些名教授，著作等身，汗牛充棟，然而內容往往脫離現實。一生所作，不見得比得上一些內容與實際有關的小品文，數十載後讀之，猶可回味。

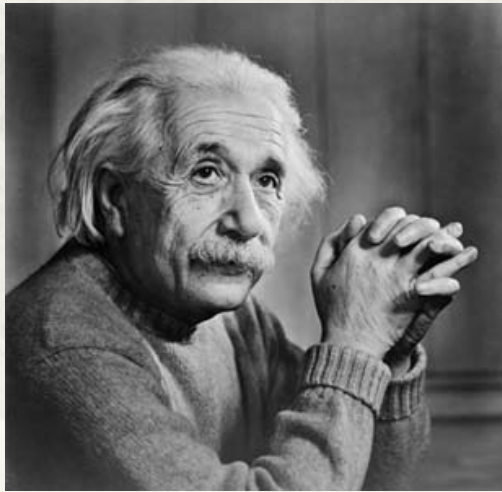
我自己做研究，有時也會玄思無際，下筆滔滔，過了一段時間後才知空談無益。在這時，總會想起張先的詞，「尋恨細思，不如桃杏，猶解嫁東風。」

我的研究工作，深受物理學和工程學的影響，這些科學提供了數學很重要的素材。

廣義相對論就是一個重要的例子。一九七三年在史丹福大學參加一個國際會議時，我對某個廣義相對論的重要問題發生興趣，它跟幾何曲率和廣義相對論質量的基本觀念有關，我鍥而不捨地思考，終於在七八年和學生Schoen一同解決了這個重要的問題。這些與相對論有關的幾何問題始終使我喜悅。

也許這是受到王國維評詞的影響，我認為數學家的工作不應該遠離大自然的真和美。直到現在我還在考慮質量的問題，它有極為深入的幾何意義。沒有物理上的看法，很難想像單靠幾何的架構，就能夠獲得深入的結果。廣義相對論中的質量問題與黑洞理論都有很美的幾何意義。

空間曲率的概念對我具有極大的吸引力，我從廣義相對論中知道所謂Ricci曲率的重要性。通過愛因斯坦方程，它描述物質的分佈，這個方程的簡潔和美麗使我詫異。



Einstein (1879-1955)



Universe

我認為瞭解Ricci曲率是瞭解宏觀幾何的最重要一環，但幾何茫茫，無從著手。有一天很高興地發現Calabi先生在一九五四年時有一篇文章，敘述在複幾何的領域中，Ricci曲率有一個漂亮的命題，但他卻沒有辦法証明這個命題。當時我很興奮，但也覺得它不大可能是真實的，因為這個命題實在太美妙了。所有年青的朋友都是這麼說，甚至我的導師也是這麼說。

陳先生甚至認為這個研究方向的意義不大，我卻固執的認為對Calabi猜測總要找出一個水落石出的答案。直到有一天，經過大量的嘗試後，我才發覺從前走的方向完全是錯誤的，於是反過來企圖証明這個猜想。但要証明它，卻需要有基本的分析能力，我和我的朋友鄭紹遠花了不少工夫去建立跟這個問題有關的工作，終於我在一九七六年完成了這個重要猜想的証明。

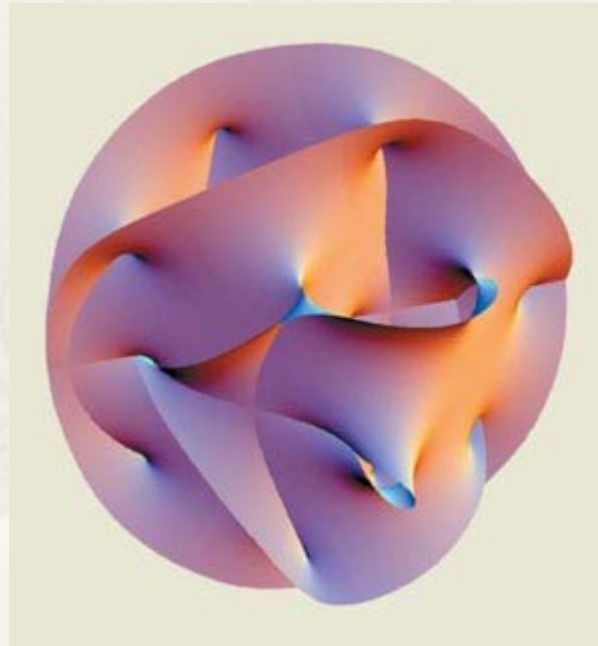
這個猜想在一九七六年全部完成，我同時應用它解決了代數幾何裏好幾個基本問題。毫無疑問的，這是一個漂亮的定理，也打開了幾何分析的一個大門。



當時我剛結婚，正在享受人生美好的時刻，也獨自地欣賞這個剛完成的定理的真實和美麗，有如自身的個體融入大自然裏面。當時的心境可以用下面兩句來描述：

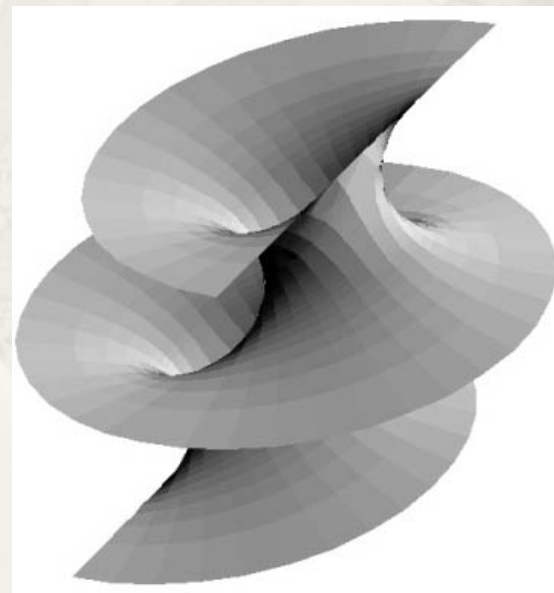
「落花人獨立，微雨燕雙飛。」

由這個定理引起的學問，除了幾何分析上的Monge-Ampere方程外，在代數幾何上獨樹一幟，以後在弦學理論成為一個重要的宇宙模型。



卡拉比-丘空間

在解決Calabi猜想的同時，有一天我碰見到從前在柏克萊的同學Meeks先生。他是一個嬉皮士，兩手各摟抱著一個少女，在系裏的走廊上高高興興地走來。但我覺得此人極有才華，建議與他合作去解決一個極小流形的古老問題。



我們用拓撲學的辦法解決了這個問題，反過來又用得到的結果，解決了拓撲學上一些重要的問題，再加上我的同學Thurston的重要工作，竟然解決了拓撲學上著名的Smith猜想。一九七六年可說是我收獲極為豐富的一年，我那年剛結婚，剛搬到洛杉磯，生活未算安定。由此何知，做學問不一定需要最安定的環境也可以成功的。

在代數幾何得到一定成功後，我接觸到很多代數幾何學家，也開始瞭解這個學科的走向。Calabi猜想是關於度量的猜測，我開始比較度量幾何和複纖維叢上的度量問題，我猜想纖維叢也有類似於Calabi猜想中的度量，同時和纖維束的穩定性有關，Uhlenbeck和我花了很長一段工夫才將這個問題全部解決。

在完成這個問題後，我建議我的朋友 Witten 考慮這個定理的物理意義，他當時認為這個定理的物理意義不大，但一年後他改變了想法，寫了一篇文章解釋它們在弦論上的作用。直到如今，這個結構在弦論上仍佔據著很重要的位置。

這篇文章花了Uhlenbeck和我很長的時間，可說是極為艱苦的奮鬥才完成的。Uhlenbeck來Princeton訪問我時，為了尋找這個問題的解法，竟然關在房間裏三天之久。

我和Uhlenbeck的工作以後被推廣，尤其是加上我的朋友Hitchin引進的Higgs Field以後，成為代數幾何和算術幾何中強有力的工具。

在一九八四年弦理論成為理論物論的重要一門學科以後，我以前做的好幾個工作都受到理論物理學家的歡迎。我也深受物理學家對數學洞察力的影響，我有十多位跟隨我的博士後，他們都是物理學博士。我從他們那裏學習物理。

最令我驚訝的一次是，我的博士後Brian Greene跑到我的辦公廳，向我解釋他最新的發現，就是在Calabi-Yau空間中，存在所謂鏡對稱的觀點，這個發現對代數幾何有極大的衝擊，影響至今。它的結論至為漂亮，從不同角度解釋了代數幾何裏百年來不解的現象，但物理學家沒有辦法給出一個證明，六年後在眾多數學家努力的基礎上，劉克峰、連文豪和我終於找到一個滿意的證明。

但是我覺得我們對鏡對稱這個現象還是沒有得到深入的瞭解，兩年後Strominger、Zaslow和我終於找到這個對稱的幾何解釋，引起了一連串重要的突破，可是，鏡對稱在數學上到現在還沒有嚴格的證明。Zaslow是跟隨我的博士後，他以後成為西北大學的大教授。

當時我和他還做了一個重要的工作。從弦學上膜的觀點，我們找到一個公式（Yau-Zaslow公式）。這個公式可以用來計算 $K3$ 曲面上的有理曲線的個數，公式由數論中的某些著名的函數給出，這是數論函數出現在計算曲線數目的第一次，以後很多代數幾何學家繼續這個研究，將這個公式推廣到更一般的情形。

與物理學家合作是愉快的經驗，可以有跳躍性的進展，而又不停的去反思，希望能夠從數學上解釋這些現象，在這個過程中往往推進了數學的前沿。

過去二十多年，我也花了一些工夫去做應用數學的工作，一方面和金芳蓉在圖論上的合作，一方面和我弟弟共同研究控制理論。近年來更和顧險峰等合作做圖像處理的研究。

這些工作都和我從前研究的幾何分析有關，尤其是我和Peter Li研究的特徵函數的問題。起源於當年我在史丹福研究調和函數的梯度估計。我還記得我傍晚時躲在辦公室裏，試驗用不同的函數來算這些估值，捨不得去看史丹福校園落日的景色。

史丹福的校園確是
漂亮，黃昏時在大教
堂的廣場，在長長的
迴廊上散步。看著落
日鎔金，青草連天的
景色，心情特別舒暢
。我早年的工作都在
這裏孕育而成。



史丹福

七九年的夏天，我和Schoen住在他女朋友Los Altos的家裏，白天我們將正品質猜想的證明逐步寫出來，到了晚上十時多才回家去游泳池游泳。在這一段日子裏，我們也將正數值曲率空間的理論完成。

做科研確實雖要付出代價，但它的快樂無窮。

先父的心願是：

「尋孔顏樂處，拓萬古心胸。」

我只知自得其樂，找尋我心目中宇宙的奧秘。

「衣沾不足惜，但使願無違。」

謝謝!

